数理解析研究所講究録
639 巻 1988 年 172-175

An example of non-Kaehler manifold which is a resolution of a ball-product cusp singularity

東北大理 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

1. $B_{s+1}=\{(z_1,\cdots,z_{s+1})\in\mathbb{C}^{s+1};\ \sum_{i=1}^{s+1}|z_i|^2<1\}$ を $s+1$ 次元複素単位球とする。B_{s+1} は第2種Siegel領域 $D_{s+1}=\{(z,u_1,\cdots,u_s)\in\mathbb{C}^{s+1};\ 2\,\mathrm{Im}\,z-\sum_{i=1}^{s}|u_i|^2>0\}$ と双正則である。D_{s+1} は $\mathbb{P}_{s+1}(\mathbb{C})$ の中に $(z,u_1,\cdots,u_s)\longmapsto[z:u_1:\cdots:u_s:1]$ により埋込めて，境界点 $[1:0:\cdots:0]$ をもつ。直積 $(D_{s+1})^r$ も $\mathbb{P}_{s+1}(\mathbb{C})^r$ の中で境界点 $\infty=([1:0:\cdots:0])^r$ をもつ。

定義. 正規孤立特異点 (X,p) が ball-product カスプ特異点であるとは，特異点 $(((D_{s+1})^r\cup\{\infty\})/\Gamma,\ \infty)$ と同型になるときをいう。ここに，Γ は ∞ を保つような $\mathrm{Aut}(D_{s+1}{}^r)$ の離散部分群である。

このような特異点を以下に構成する。F を総実 r 次代数体，K を F の総虚二次拡大とし，K の $\mathbb{C}$ への埋込みを $\{\sigma_1,\bar\sigma_1,\cdots,\sigma_r,\bar\sigma_r\}$ とし，$\mathrm{Gal}(K/F)=\{id,\rho\}$ とする。N を F の階数 r の自由 $\mathbb{Z}$-部分加群とし，T を K-係数の s 次正方行列で，${}^tT=T$, $T^\rho=-T$, $-\sqrt{-1}\,\sigma_i(T)$ が正Hermite行列となるものとする。このとき，

Tは歪ρ-対称形式 $E: K^s \times K^s \longrightarrow F$ を$E(\ell_1, \ell_2) = \mathrm{trace}_{K/F}({}^t\ell_1 T \ell_2^\rho)$で定める。$M$を$K^s$の階数$2rs$の自由$\mathbb{Z}$-部分加群で，すべての$\ell, \ell' \in M$に対し $E(\ell, \ell') \in N$ を満たすものとする。更に，ΓをKの単数群の有限指数の自由部分群で，MとNとを保つものとする。ここで，Γは相対ノルム$\mathrm{norm}_{K/F}$を通してNに作用すると考える。

埋込み $K \ni x \longmapsto \sigma(x) = (\sigma_1(x), \cdots, \sigma_r(x)) \in \mathbb{C}^r$ により，Mを$\mathbb{C}^{rs}$の格子，Nを$\mathbb{R}^r$の格子とみなす。Hermite形式 $H: M_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \longrightarrow N_{\mathbb{C}}$ を$H(\ell_1, \ell_2) = E(\ell_1, \sqrt{-1}\ell_2) + \sqrt{-1}E(\ell_1, \ell_2)$で定めると，$H$は

(i) $H(\ell, \ell) \in \overline{C_+}$ $\forall \ell \in M_{\mathbb{R}}$，$C_+ = (\mathbb{R}_{>0})^r$ は$N_{\mathbb{R}}$内の錐。

(ii) $H(\ell, \ell) = 0$ ならば $\ell = 0$.

を満たす。$\mathcal{D} = \{(z, u) \in N_{\mathbb{C}} \times M_{\mathbb{R}} ; 2\,\mathrm{Im}\, z - H(u, u) \in C_+\}$ とおくと，$\mathcal{D}$は$(B_{s+1})^r$と双正則となる。一方，$\mathrm{norm}_{K/F}(\Gamma)$は$F$の単数群の指数有限な部分群だから，超曲面$\{(x_1, \cdots, x_r) \in N_{\mathbb{R}} ; \prod_{i=1}^r x_i = 1\}$の格子である。従って，$\Gamma$の$C_+/\mathbb{R}_{>0}$への作用は固有不連続かつ固定点なしであり，その商空間はコンパクトである。

以上により(N, C_+, M, Γ)は[O2]の§1の条件を満たすことが判って，正規孤立特異点(V, p)が得られる。構成から，$V \setminus \{p\} \cong \mathcal{D}/N \cdot M \cdot \Gamma$だから，$(V, p)$はball-productカスプ特異点である。

2. N, M, H, Γ を §1 と同じものとする。実解析的写像 $\tilde{\Phi}: N_{\mathbb{C}}\times M_{\mathbb{R}} \longrightarrow N_{\mathbb{R}}$ を $\tilde{\Phi}(z,u)=2\,\mathrm{Im}\,z-H(u,u)$ により定義する。$\tilde{\Phi}$ は M, N の作用で不変だから，$\Phi: T_N\times M_{\mathbb{R}}\to N_{\mathbb{R}}$ と $\bar{\Phi}: (T_N\times M_{\mathbb{R}})/M \longrightarrow N_{\mathbb{R}}$ を誘導する。ここに，$T_N=N_{\mathbb{C}}/N$ は r 次元代数トーラス $(T_N\times M_{\mathbb{R}})/M$ はアーベル多様体 $A=M_{\mathbb{R}}/M$ 上の主 T_N-束である。$\bar{\Phi}$ は Γ-同変である。$C_-=(\mathbb{R}_{>0})^{r-1}\times\mathbb{R}_{<0}$ を $N_{\mathbb{R}}$ の開錐とする。$\Delta_\pm$ を $C_\pm\cap N$ の凸包の境界の多面体分割から得られる非特異 Γ-admissible 扇とする。$\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$ とおく。扇に対応するトーラス埋込みを $T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ とする。T_N-束に付随する束

$$Z:=(T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)\times M_{\mathbb{R}})/M$$

を作り，$\bar{\Phi}$ を $Z\longrightarrow M_c(N,\Delta)$ に拡張する。$M_c(N,\Delta)$ は角付き多様体である。$C=(\mathbb{R}_{>0})^{r-1}\times\mathbb{R}$ とおき，$\hat{C}$ を $M_c(N,\Delta)$ 内での C の閉包の内部とする。$\tilde{U}:=\bar{\Phi}^{-1}(\hat{C})$, $\tilde{Y}:=\tilde{U}\setminus\bar{\Phi}^{-1}(C)$ とおく。$\tilde{Y}$ は2つの連結成分 $\tilde{Y}_\pm=\tilde{Y}\setminus\bar{\Phi}^{-1}(\overline{C_\mp})$ に分れる。

<u>補題 2.1.</u> Γ の $\tilde{U}$ と $\tilde{Y}_\pm$ への作用は固有不連続かつ固定点なしであり，商空間 $X=\tilde{U}/\Gamma$ はコンパクト，$Y_\pm=\tilde{Y}_\pm/\Gamma$ は X 上の因子である。$Y=\tilde{Y}/\Gamma=Y_+\cup Y_-$.

<u>補題 2.2.</u> $\pi_1(X)\cong M\rtimes\Gamma$, $H^1(X,\mathbb{Z})\cong\Gamma$.

<u>補題 2.3.</u> (i) $H^0(X,\Omega^1_X(\log Y))=0$。従って，$H^0(X,\Omega^1_X)=0$.

(ii) $\dim H^1(X,\mathcal{O}_X)\geqq r-1$.

定理　上で構成したコンパクト複素多様体 X はケーラー計量を持ち得ない。更に，因子 Y_+ は正規孤立特異点 (V, p) につぶれる。

命題2.4.　$K_X = -Y$.

命題2.5.　$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ を既約成分への分解とするとき，X の Chern 類は

$$c(X) = \prod_{i \in I}(1 + c_1(\mathcal{O}_X(Y_i)))$$

と書ける。

系　$c_k(X) = 0$ $(k \geq r+1)$. 特に，Euler 数 $e(X) = 0$.

命題2.6.　$\chi(\mathcal{O}_X) = 2^{-r(s+1)}\tau(X)$。 ここに $\tau(X)$ は X の指数，つまり，$H^{r(s+1)}(X, \mathbb{Z})$ 上にカップ積で決まる2次形式の指数である。

参考文献

[O] S. Ogata, Infinitesimal deformations of generalized cusp singularities, Tohoku Math. J. 39(1987), 237-248.

[S] G.K. Sankaran, Higher dimensional analogues of Inoue-Hirzebruch surfaces, Math. Ann. 276(1987), 515-528.